Teoretická část - 28.1.2021

1. (a) Definujte funkci spojitou v bodě, funkci spojitou na intervalu a derivaci funkce v bodě (3 body).

   (b) Zformulujte a dokažte lemma o vztahu derivace a spojitosti (2 body).

   (c) Mějme funkci $f : [-2, -1] \to \mathbb{R}$ a uvažme následující výroky:

   (A) f je spojitá na $[-2, -1]$,
   (B) f' existuje na $(-2, -1)$,
   (C) f je konstantní na $[-2, -1]$,
   (D) $f(-2) = f(-1)$.

   Rozhodněte o platnosti následujících tvrzení:

   (i) pokud platí (A) a (B), potom není pravda, že $f'(x) > 0$ pro všechna $x \in (-2, -1)$,
   (ii) pokud platí (B) a (D), potom není pravda, že $f'(x) > 0$ pro všechna $x \in (-2, -1)$,
   (iii) pokud platí (A), (B) a (D), potom není pravda, že $f'(x) > 0$ pro všechna $x \in (-2, -1)$,
   (iv) pokud platí (A), (B) a (D) a neplatí (C), potom existují $x, y \in (-2, -1)$, že $f'(x)f'(y) < 0$.

   Vše řádně zdůvodněte (3 body).

2. (a) Zformulujte věty o spojitosti a Riemannově integrálu, závislosti integrálu na horní mezi a spojitosti a primitivní funkci (4 body).

   (b) Větu o závislosti integrálu na horní mezi dokažte (3 body).

   (c) Nechť $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je spojitá na $\mathbb{R}$ a $f(x) > 0$, $x \in \mathbb{R}$. Nechť navíc F je primitivní funkce k f na $\mathbb{R}$. Dokažte, že limita $\lim_{n\to\infty} (F(n^2) - F(-n^2))$ existuje a je kladná (1 bod).

3. (a) Definujte shora a zdola omezenou množinu, horní a dolní závoru a infumum a supremum (vše stačí pro množiny v $\mathbb{R}$) (3 body).

   (b) Zformulujte a dokažte větu o Archimedově vlastnosti $\mathbb{R}$ (2 body).

   (c) Nechť $A, B \subset \mathbb{R}$ jsou omezené množiny. Rozhodněte o platnosti následujících tvrzení:

   (i) $\sup A$ i $\inf A$ existují,

   (ii) pokud $A \cap B \neq \varnothing$, potom $\sup A$, $\sup B$ a $\sup(A \cap B)$ existují a platí $\sup(A \cap B) \leq \min(\sup A, \sup B)$,

   (iii) pokud $A \cap B \neq \varnothing$, potom $\sup A$, $\sup B$ a $\sup(A \cap B)$ existují a platí $\sup(A \cap B) = \min(\sup A, \sup B)$,

   (iv) pokud $\sup A$ existuje a A obsahuje jen sudá čísla, potom $\sup A$ je sudé číslo.

   Řádně zdůvodněte. (3 body).